



TITLE:

# リバーサル限定交代チューリング機械の交代数について(計算量理論)

AUTHOR(S):

山本, 博章

---

CITATION:

山本, 博章. リバーサル限定交代チューリング機械の交代数について(計算量理論). 数理解析研究所講究録 1994, 871: 24-28

ISSUE DATE:

1994-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/84062>

RIGHT:

## リバーサル限定交代チューリング機械の交代数について

信州大学工学部 山本博章 (Hiroaki Yamamoto)

### 1 まえがき

本論文では、交代チューリング機械 (Alternating Turing Machine, 以下, ATM と略す) の交代数について考える。これは、計算の中で、全称状態と存在状態が交代する回数で定義され、Chandra ら [2] によって導入された。彼らは多項式時間階層 [5,8] との関係を明らかにし、交代数が重要な概念であることを示した。交代数に関する重要な問題として、交代数の差によって ATM 間に能力差が生じるか否かがある。この問題は他の計算量と組み合わせられて今まで研究されてきた。領域計算量に関しては、例えば Toda[6] の研究があるが、Immerman[3] が領域限定非決定性 TM (以下, NTM) は補集合演算に関して閉じていることを示したことにより、交代数による階層が生じないことが示された。すなわち、 $\sigma_k$  機械で領域  $O(R(n))$  で受理される言語は  $\sigma_1$  機械によっても領域  $O(R(n))$  で受理される。ここで、 $\sigma_k$  機械とは存在状態で始まり、高々  $k-1$  回状態を交代する ATM のことである。結局、領域に関しては、定数回の交代数では能力差がない。時間に関しては、まだ未解決のままである。

本論文ではリバーサル計算量について考える。リバーサル計算量はヘッドの反転回数で定義されるが、これについても交代数による階層に関する研究がある。Liskiewicz 他 [11] は 1 テープ ATM を考え、領域限定 NTM との等価性を示すことにより、リバーサルが限定された  $\sigma_k$  機械と  $\sigma_{k+1}$  機械の間には能力差があることを示した。このように通常の 1 テープ ATM では言語の階層が生じるが、本論文では、どのような条件を満たせば交代数による階層が潰れるかについて調べる。そのために、ここでは次のような制限したモデルを考える。リバーサル限定 ATM  $M$  は全称状態から存在状態、または存在状態から全称状態へ交代するとき、 $M$  はまずテープ上の空白でない部分を  $R(n)$  以下にし、それから状態を交代する。すなわち、 $M$  は通常はテープの使用に制限はないが、状態を交代するとき一時的にテープ量を  $R(n)$  以下に抑えなければならない。このような制限を持つ機械 (本論文では  $r\sigma_k, r\pi_k$  機械と呼ばれる) に対し、我々は交代数の階層が潰れてしまう結果を得ることができる。

本論文は入力専用テープを持ったオフライン 1 テープ ATM に関してのみ議論する。同じような制限を持った 1 テープ ATM に対しても同様な結果が成り立つがそれについては省略する。このように、ここでは、記憶テープが 1 本だけの ATM を扱うが、これは、2 本以上テープを持つ NTM は定数回のリバーサルで任意の帰納的可算集合を受理できるため [1], 2 本以上テープを持つ ATM では自明の結果が成り立つからである。

## 2 準備

ATMについては文献 [2] などを参照していただくことにし、以下では本論に必要な定義を述べる。注意として、関数はすべて自然数から実数への非減少関数を意味し、 $L(M)$  によって  $M$  によって受理される言語を表す。

**定義 1**  $R(n), S(n)$  を関数とする。  $M$  を ATM とする。長さ  $n$  の任意の入力  $w \in L(M)$  に対し、 $M$  の受理計算木で、根から葉へ向かうどの計算パスにおいても高々  $O(R(n))$  回しかヘッドを反転させないとき（それぞれ、どのノードの  $ID$  も高々  $O(S(n))$  の領域しか使わないとき）、 $M$  を  $R(n)$  リバーサル限定（それぞれ、 $S(n)$  領域限定）ATM と呼ぶ。

**定義 2** 任意の入力に対し、その計算が存在状態（それぞれ、全称状態）で始まり、高々  $k-1$  回全称状態と存在状態の交代をするだけである ATM を  $\sigma_k$  機械（それぞれ、 $\pi_k$  機械）と呼ぶ。明らかに、 $\sigma_1$  機械は NTM のことである。また、特に  $R(n)$  リバーサル限定  $\sigma_k$  機械、 $\pi_k$  機械で、状態を交代するときに、記憶テープの左端からもっとも右側の空白でない記号（後で述べるエンドマーカは除く）までの長さを  $R(n)$  以下にしてから状態を交代する機械を、それぞれ、 $r\sigma_k$  機械、 $r\pi_k$  機械と呼ぶ。

本論文を通し、我々は  $\sigma_1$  機械、 $\pi_1$  機械に対し、エンドマーカ付き機械を考える。これは以下のような機械である。この機械はあるます目にエンドマーカを持つ右方向無限の 1 本の記憶テープを持つ。計算中この機械はテープヘッドをエンドマーカより右に出すことはしない。すなわち、この機械は左端とこのマーカで囲まれた領域のみ使って計算する。エンドマーカの位置は入力によって異なって良い。このようなエンドマーカ付き  $\sigma_1$  機械、 $\pi_1$  機械を  $e\sigma_1$  機械、 $e\pi_1$  機械と呼ぶ。

また、初期状況として記憶テープ上に任意の記号列を持つ ATM を考え、それに対しては次のような記述を用いる。 $M$  を ATM とする。今、入力  $w$ 、記憶テープ記号  $\alpha$  が与えられてスタートし、 $M$  が  $w$  を受理するとき、我々は  $M$  は  $(w, \alpha)$  を受理するという。また論文中、2 つの機械  $M, N$  に対し、「 $M$  が  $(w, \alpha)$  を受理する／しない必要十分条件は  $N$  が  $(w, \alpha)$  を受理する／しないことである」という表現を用いるが、このとき  $\alpha$  は  $M$  と  $N$  のテープの同じます目に与えられていることを意味する。

次に、我々はブロック化 TM というものを考える。これは記憶テープが長さ  $O(n)$  のブロックに分かれている TM であり、通常の TM の 1 ます目に対し 1 ブロックが対応する。ブロック化 TM は各ブロックの先頭のます目を計算中に使用するのみで、ブロック内の他のます目は使わない。したがって、この機械に対する領域計算量を以下のように定義する。すなわち、 $M$  が  $S(n)$  領域限定ブロック化 TM であるとは、 $M$  が高々  $S(n)$  個のブロックを使用するだけのときをいう。さらに、 $M$  が初期状況でテープ上に  $a_1 \cdots a_m$  を持つとは、各ブロックの先頭のます目の内容が  $a_1, \dots, a_m$  であることをいう。

以上の定義から明らかなように、 $S(n)$  領域限定ブロック化 TM は簡単に  $S(n)$  領域限定 TM によってシミュレートされる。

### 3 基本結果の拡張

ここでは、従来知られている結果を記憶テープ上に任意の記号列を持つ場合に拡張する。まず、Immermanの結果を見る。

**命題 1**  $S(n) \geq \log n$  を領域構成可能関数、 $M$  を  $S(n)$  領域限定ブロック化  $\sigma_1$  機械とする。そのとき、以下を満足する  $S(n)$  領域限定ブロック化  $\sigma_1$  機械  $M'$  が存在する。 $\forall w, \forall \alpha$  に対し、 $M$  が  $(w, \alpha)$  を受理する必要十分条件は  $M'$  が  $(w, \alpha)$  を受理しない。

(証明) Immerman[3] の証明がそのまま適用できる。

次に、領域とリバーサルに関する結果を拡張する。

**命題 2**  $M$  を  $S(n)$  領域限定ブロック化  $\sigma_1$  機械とする。そのとき、次を満足する  $S(n)$  リバーサル限定  $e\sigma_1$  機械  $N$  が存在する。

1.  $\forall w, \forall \alpha$  に対し、 $M$  が  $(w, \alpha)$  を受理する必要十分条件は  $N$  が  $(w, \alpha)$  を受理することである。
2. 任意のペア  $(w, \alpha)$  に対し、 $N$  のすべての計算パスは停止する。

この命題の証明は基本的には Greibach[9] の証明手法を使うが、初期状況で任意の記号列  $\alpha$  が許されるので、それをうまく処理する必要がある。ここではその証明については省略する。

**命題 3**  $M$  を  $S(n)$  リバーサル限定  $\sigma_1$  機械とする。そのとき、次を満足する  $S(n) \log n$  領域限定ブロック化  $\sigma_1$  機械  $N$  が存在する。

$\forall w, \forall \alpha$  に対し、 $M$  が  $(w, \alpha)$  を受理する必要十分条件は  $N$  が  $(w, \alpha)$  を受理することである。

この命題の証明は通過列を使うことにより簡単に得られる (例えば、[7] を見よ)。

### 4 結果

まず、リバーサル構成可能関数について定義する。

**定義 3** 関数  $R(n)$  がリバーサル構成可能であるとは、入力として  $1^n$  が与えられたとき、 $O(R(n))$  回のリバーサルで  $R(n)$  を計算できる決定性オフライン 1 テープ機械が存在するときをいう。

リバーサル構成可能関数としては、 $\log n$ 、 $n^k$ 、 $2^n$  などがある。

**補題 1**  $R(n)$  をリバーサル構成可能関数とする。 $M$  を  $R(n)$  リバーサル限定ブロック化  $e\pi_1$  機械とする。そのとき、任意の入力に対し停止する  $R(n)$  リバーサル限定  $\pi_1$  機械  $N$  で以下を満足する機械が存在する。 $\forall w, \forall \alpha$  に対し、 $M$  が  $(w, \alpha)$  を受理する必要十分条件は  $N$  が  $(w, \alpha)$  を受理することである。

**補題 2**  $M$  を  $R(n)$  リバーサル限定  $\sigma_1$  機械 ( $\pi_1$  機械) で、任意の入力に対しすべての計算パスが停止するとする。そのとき、次の条件を満足する  $R(n)$  リバーサル限定  $\pi_1$  機械 (それぞれ、 $\sigma_1$  機械)  $N$  が存在する。 $\forall w, \forall \alpha$  に対し、 $M$  が  $(w, \alpha)$  を受理しない必要十分条件は  $N$  が  $(w, \alpha)$  を受理することである。

**補題 3**  $R(n)$  をリバーサル構成可能関数とする。 $M$  を  $R(n)$  リバーサル限定  $e\sigma_1$  機械とする。そのとき、次を満足する  $R(n)$  リバーサル限定  $\pi_1$  機械  $N$  が存在する。 $\forall w, \forall \alpha$  に対し、 $M$  が  $(w, \alpha)$  を受理する必要十分条件は  $N$  が  $(w, \alpha)$  を受理することである。

この補題は、命題 3、命題 1、命題 2、補題 2 の順に適用することにより得られる。

**補題 4**  $R(n)$  をリバーサル構成可能関数とする。 $M$  を  $R(n)$  リバーサル限定  $e\pi_1$  機械とする。そのとき、次を満足する  $R(n)$  リバーサル限定  $\sigma_1$  機械  $N$  が存在する。 $\forall w, \forall \alpha$  に対し、 $M$  が  $(w, \alpha)$  を受理する必要十分条件は  $N$  が  $(w, \alpha)$  を受理することである。

この補題は、補題 2、命題 3、命題 1、命題 2 の順に適用することにより得られる。

以上で本論文の主結果である以下を示す準備ができた。

**定理 1**  $R(n)$  をリバーサル構成可能かつ領域構成可能関数とする。 $M$  を  $R(n)$  リバーサル限定  $r\sigma_k$  機械 ( $k \geq 1$ ) とする。そのとき、 $M$  と同じ言語を受理する  $R(n)$  リバーサル限定  $\sigma_1$  機械が存在する。

(略証)  $r\sigma_k$  機械 ( $k \geq 1$ ) について証明しよう。交代数  $k$  上の帰納法によって証明される。 $k = 1$  の場合は明らかである。したがって、 $k \geq 2$  に対し、 $r\sigma_{k-1}$  機械が  $r\sigma_k$  機械を模倣できることを示せば十分である。今、 $M$  を  $R(n)$  リバーサル限定  $r\sigma_k$  機械とする。この  $M$  を模倣する  $r\sigma_{k-1}$  機械  $N$  を以下のように作る。

**ステップ 1** まず  $N$  は  $M$  が使うます目の個数  $m$  を推測し、ある定数  $c$  に対し、長さ  $cn$  のブロックを  $m$  個作る。その後、 $N$  は十分な領域を確保して、右端にエンドマーカをおく。さらに、 $R(n)$  をリバーサル  $R(n)$  で計算する。

**ステップ 2**  $N$  は以降ブロック化 TM のように、 $M$  の 1 ます目に対し、1 ブロックを割り当てて  $M$  の動作を模倣する。計算中、 $N$  は交代の回数を有限制御部でカウントしている。 $M$  が  $k-1$  回目の交代をしようとしたとき、 $N$  は現在テープヘッドがある位置に印をつけ、左端に戻す。さらに、入力ヘッドの位置を記憶するためその長さ分のブロックの先頭のます目に印をつけておく。

**ステップ 3** もし  $M$  の計算の最後の層が存在状態だけならば、そこは正しく  $\sigma_1$  機械と同じになる。そのとき、この  $e\sigma_1$  機械の代わりに  $N$  は補題 3 の  $\pi_1$  機械を使う。また、もし  $M$  の計算の最後の層が全称状態だけならば、そこは正しく  $e\pi_1$  機械と同じになり、 $N$  は補題 4 の  $\sigma_1$  機械を使う。

以上のように、我々は  $N$  を構成できる。

(終)

$r\pi_k$  機械は  $r\sigma_{k+1}$  機械によって模倣されることを考えれば、以下の結果も成り立つ。

系 1  $R(n)$  をリバーサル構成可能でかつ領域構成可能関数とする。 $M$  を  $R(n)$  リバーサル限定  $r\pi_k$  機械 ( $k \geq 1$ ) とする。そのとき,  $M$  と同じ言語を受理する  $R(n)$  リバーサル限定  $\sigma_1$  機械が存在する。

## 5 むすび

我々は  $R(n)$  限定 ATM で、全称状態と存在状態が交代するときは必ずその空白でない領域を  $R(n)$  に抑える、というモデルを導入し、交代数による能力差について議論した。その結果、リバーサル計算量に関してはこのようなモデルでは、交代数による能力差が生じないことが示された。

## 参考文献

- (1) B.S.Baker and R.V.Book, Reversal bounded multipushdown machines, J. Comput. System. Sci.,8,pp.315-322(1974).
- (2) A.K.Chandra, D.C.Kozen and L.J.Stockmeyer, Alternation, J.Assoc. Comput. Mach. 28,1, pp.114-133(1981)
- (3) N.Immerman, Nondeterministic space is closed under complementation, SIAM J.Comput.,17, 5, pp.935-938(1988)
- (4) M.Liskiewicz, K.Lorys and M.Piotrow, Note on Reversal bounded alternating Turing machines, Theoret. Comput. Sci.,54,pp.331-339(1987)
- (5) L.J.Stockmeyer, The Polynomial-time hierarchy, Theoret. Comput. Sci., 3,pp.1-22(1977)
- (6) S.Toda,  $\Sigma_2SPACE(n)$  is Closed under Complement, J. Comput. System 35,2,pp.145-152(1987)
- (7) H.Yamamoto and S.Noguchi, Comparison of the power between Reversal-Bounded ATMs and Reversal-Bounded NTMs, Inform. and Computation, 75,2,pp.144-161(1987)
- (8) C.Wrathall, Complete sets and the polynomial-time hierarchy, Theoret. Comput. Sci.,3,pp.23-33(1977)
- (9) Greibach, Visits, crosses and reversal for nondeterministic off-line machines, Inform. and Control, 36, pp.174-216(1978)
- (10) M. Kutyłowski, M. Liskiewicz and K. Lorys, Reversal complexity classes for alternating Turing machines, SIAM J. Comput. 19, 2, pp.207-221(1990)
- (11) M. Liskiewicz and K. Lorys, On reversal complexity for alternating Turing machines, 30th IEEE FOCS, pp.618-623(1989)